Tentamen Lineaire Algebra

27 augustus 2009 14.00-17.00 uur

Tijdens dit tentamen mogen boek/diktaat/aantekeningen en de grafische rekenmachine worden geraadpleegd. **Alle antwoorden dienen te worden gemotiveerd.** Een antwoord zonder berekening zal dus niet worden goed gerekend. Succes !

Dit tentamen zal worden nagekeken in de 3e week van september.

Vermeld op elke bladzijde je naam en studentnummer.

Gratis: $\boxed{10}$

1. Gegeven is het stelsel van vergelijkingen

$$\begin{array}{rcrcrcr} 5x & + & 5y & & & = & 5 \\ \alpha x & & & + & 2z & = & -1 \\ x & + & y & - & 2z & = & \beta \end{array}$$

Hierin zijn α en β nader te bepalen constantes.

(a) $\boxed{5}$ Neem $\alpha = 1$ en $\beta = 9$ en bepaal de oplossing van het stelsel.

(b) $\boxed{8}$ Bepaal voor welke α en β het stelsel

(i) precies één oplossing heeft

(ii) geen enkele oplossing heeft

2. Gegeven zijn de vectoren

$$\vec{\mathbf{a}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{\mathbf{b}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{en} \quad \vec{\mathbf{c}} = \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \\ 0 \end{pmatrix}$$

Hierin is α een nader te bepalen constante.

(a) $\boxed{6}$ Bepaal voor welke α de hoek tussen $\vec{\mathbf{b}}$ en $\vec{\mathbf{c}}$ gelijk is aan de hoek tussen $\vec{\mathbf{a}}$ en $\vec{\mathbf{b}}$.

(b) $\boxed{5}$ Voor welke α zit de vector $\vec{\mathbf{c}}$ in het lineaire opspansel (Engels: span) van de vectoren $\vec{\mathbf{a}}$ en $\vec{\mathbf{b}}$?

3. Gegeven zijn de matrices

$$\mathbf{E_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{E_2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{en} \quad \mathbf{E_3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

(a) $\boxed{6}$ Bepaal de inverses van $\mathbf{E_1}$, $\mathbf{E_2}$ en $\mathbf{E_3}$, dus de matrices $\mathbf{E_1^{-1}}$, $\mathbf{E_2^{-1}}$ en $\mathbf{E_3^{-1}}$.
Aanwijzing: de matrices $\mathbf{E_1}$, $\mathbf{E_2}$ en $\mathbf{E_3}$ hebben een mooie structuur.

(b) $\boxed{6}$ De matrix $\mathbf{A}$ is gedefinieerd door $\mathbf{A} = \mathbf{E_1 E_2 E_3}$. Bepaal de matrix $\mathbf{A^{-1}}$, zonder de matrix $\mathbf{A}$ expliciet te bepalen.
Aanwijzing: maak gebruik van de resultaten gevonden bij onderdeel a).

Z.O.Z.

4. Gegeven zijn de vectoren

$$\vec{\mathbf{v_1}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{\mathbf{v_2}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{\mathbf{v_3}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{\mathbf{e_1}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{en} \quad \vec{\mathbf{c}} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Van de lineaire transformatie $\mathbf{T}$ is gegeven dat $\mathbf{T}(\vec{\mathbf{v_1}}) = \vec{\mathbf{v_2}}$, $\mathbf{T}(\vec{\mathbf{v_2}}) = \vec{\mathbf{v_3}}$ en $\mathbf{T}(\vec{\mathbf{v_3}}) = \vec{\mathbf{v_1}}$.

(a) $\boxed{3}$ Bereken het beeld van $\vec{\mathbf{e_1}}$, dus $\mathbf{T}(\vec{\mathbf{e_1}})$.
Aanwijzing: $\vec{\mathbf{e_1}} = \frac{1}{2}(\vec{\mathbf{v_1}} + \vec{\mathbf{v_2}} - \vec{\mathbf{v_3}})$.

(b) $\boxed{7}$ Bepaal de standaard matrix $\mathbf{A}$ bij de transformatie $\mathbf{T}$, zodanig dat voor alle $\vec{\mathbf{x}}$ geldt $\mathbf{T}(\vec{\mathbf{x}}) = \mathbf{A}\vec{\mathbf{x}}$.

(c) $\boxed{4}$ Bepaal een orgineel van $\vec{\mathbf{c}}$. Is dit het enige orgineel?

5. Gegeven zijn de matrix $\mathbf{M}$ en de toestandsvector $\vec{\mathbf{r}}_0$:

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 0.8 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0.5 \end{pmatrix} \quad \text{en} \quad \vec{\mathbf{r}}_0 = \begin{pmatrix} 130 \\ 9 \\ 27 \end{pmatrix}$$

De matrix $\mathbf{M}$ beschrijft toestandsovergangen volgens $\vec{\mathbf{r}}_{k+1} = \mathbf{M}\vec{\mathbf{r}}_k$.

(a) $\boxed{5}$ Bereken de eigenwaarden van $\mathbf{M}$.
Aanwijzing: $\lambda = -1$ is één van de eigenwaarden. Maak eventueel gebruik van de structuur van de matrix.

(b) $\boxed{6}$ Bereken de eigenvectoren van $\mathbf{M}$.

(c) $\boxed{7}$ Bepaal m.b.v. de eigenwaarden en eigenvectoren de toestanden $\vec{\mathbf{r}}_k$ (voor willekeurige k), wanneer wordt begonnen met begintoestand $\vec{\mathbf{r}}_0$.

(d) $\boxed{4}$ Beschrijf de toestand na zeer veel overgangen, dus $k \to \infty$. Is er sprake van een stationaire (dus constante) eindtoestand?

6. Gegeven is het inhomogene stelsel differentiaalvergelijkingen voor $y_1(t)$ en $y_2(t)$

$$\begin{aligned} y_1{}'(t) &= 2\,y_1(t) - 2\,y_2(t) + 4\,e^{2t} \\ y_2{}'(t) &= -3\,y_1(t) + y_2(t) - e^{2t} \end{aligned}$$

met randvoorwaarden $y_1(0) = 3$ en $y_2(0) = 3$.

(a) $\boxed{6}$ Bereken de eigenwaarden en eigenvectoren bij het (homogene) stelsel.

(b) $\boxed{9}$ Bepaal de algemene (reële) oplossing van het inhomogene stelsel.
In geval van complexe eigenwaarden en eigenvectoren mag je de complexe oplossing direct (dus zonder berekening) omzetten in de reële oplossing.

(c) $\boxed{3}$ Bepaal de oplossing van het inhomogene stelsel met de bijbehorende randvoorwaarden.

Totaal: $\boxed{100}$